Algebraïsche Vaardigheden

John Kleppe
Elleke Janssen

Tilburg University

Voorwoord

Tilburg, maart 2011

Dit dictaat is geschreven om gebruikt te worden voor wiskunde B lessen voor 5 en 6 VWO scholieren. Dit dictaat is tot stand gekomen door samenwerking met Rachid el Afia van Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch.

Bij het schrijven van dit dictaat is gebruik gemaakt van het boek 'Inleiding in de analyse' door Bob Kaper en Henk Norde en het dictaat 'Proofs and Techniques' door Henk Norde. Verder bedanken de schrijvers Bart Husslage voor zijn medewerking aan deze tweede versie van het dictaat.

Informatie wiskunde B/D op de UvT:

In 2007 is op de Universiteit van Tilburg een projectteam begonnen met het project 'wiskunde D op de UvT'. Dit team heeft onder andere dictaten ontwikkeld die voor het vrije deel van wiskunde D gebruikt kunnen worden. In 2009 is dit project uitgebreid: ook voor het vak wiskunde B zijn dictaten ontwikkeld, die gebruikt kunnen worden voor verdieping van bestaande onderwerpen of toepassing van bekende wiskunde op nieuwe onderwerpen.

Voor meer informatie kunt u kijken op de websites www.tilburguniversity.edu/wiskundeb voor wiskunde B en www.tilburguniversity.edu/wiskunded voor wiskunde D. U kunt ook contact opnemen met de projectleider, prof. dr. Herbert Hamers (H.J.M.Hamers@uvt.nl).

Inhoudsopgave

1

Introductie

De stad Quadratia bestaat uit 21 horizontale en 21 verticale straten; zie Figuur 1.1 voor een plattegrond. Op het kruispunt van de straten V10 (verticale straat nr. 10) en H6 (horizontale straat nr. 6) staan een fietser en een helikopterpiloot. Ze besluiten een wedstrijdje te houden over wie het snelst op een kruispunt aan de zuidkant van de stad kan zijn en dus uit te komen op de straat H0. Ze ruziën nog over naar welke verticale straat ze gaan. Beiden willen natuurlijk winnen. Als we weten hoe snel de fietser en de helikopterpiloot zijn, kunnen we voor ieder kruispunt op de straat H0 bepalen wie er het snelst zou kunnen zijn.

De fietser kan direct vertrekken, maar moet over de straten rijden en fietst 24 kilometer per uur. De helikopterpiloot zal eerst in moeten stappen, de motor op moeten starten en boven de gebouwen uit moeten komen; bij de landing zal hij de omgekeerde procedure uit moeten voeren. Alles bij elkaar kost dit hem $7\frac{1}{2}$ minuut. Eenmaal in de lucht hoeft hij natuurlijk niet het stratenpatroon te volgen en kan hij dus in een rechte lijn naar de finish vliegen; zijn snelheid hierbij is 30 kilometer per uur. Als je weet dat de afstand tussen twee kruispunten 500 meter is, welke verticale straten zou de helikopterpiloot dan voor moeten stellen om te kunnen winnen?

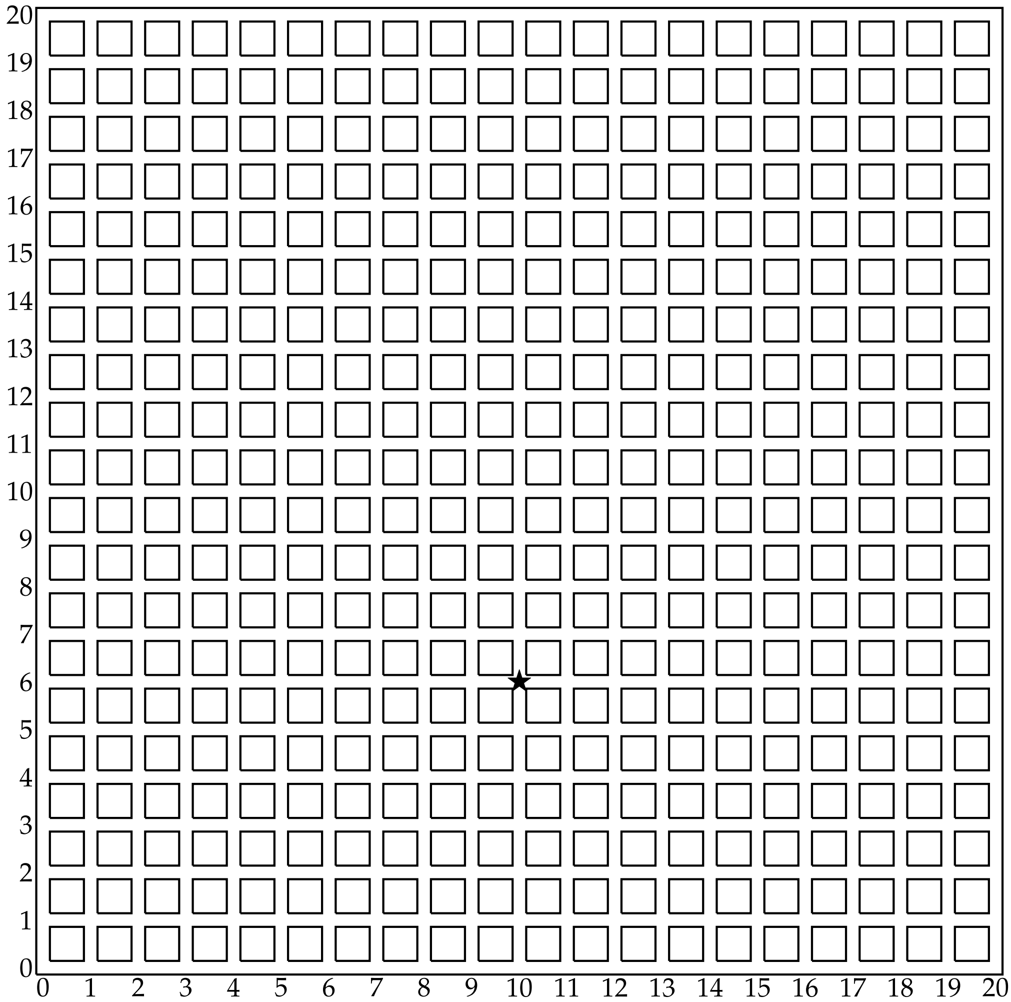
We kunnen dit probleem oplossen met behulp van wiskunde. Ten eerste kunnen we de plattegrond zien als een assenstelsel, waarbij de kruispunten overeenkomen met punten in dit assenstelsel; het startpunt van de wedstrijd is dan bijvoorbeeld $(10,6)$, de hoek linksonder (het kruispunt van V0 en H0) is $(0,0)$ en het kruispunt van V13 en H7 is $(13,7)$. Een willekeurig kruispunt aan de zuidkant van de stad kunnen we dan noteren met $(x,0)$, waarbij $x = 0,1,2,\ldots,20$.

De afstand die de helikopterpiloot aflegt van het startpunt naar een willekeurig kruispunt aan de zuidkant van de stad is de afstand tussen het punt $(10,6)$ en het punt $(x,0)$. Dus gebruikmakend van de stelling van Pythagoras is deze afstand

$$\sqrt{(\text{horizontale afstand})^2 + (\text{verticale afstand})^2} \quad = \quad \sqrt{(10-x)^2 + (6-0)^2}.$$

De helikopterpiloot vliegt 30 km/u, dus over 500 meter doet hij 1 minuut; verder heeft hij $7\frac{1}{2}$ minuut nodig om boven de gebouwen uit te komen en te dalen. De totale reistijd van de helikopterpiloot is dus

$$7\tfrac{1}{2} + 1 \cdot \sqrt{(10-x)^2 + (6-0)^2} \quad = \quad 7\tfrac{1}{2} + \sqrt{(10-x)^2 + 36} \text{ minuten.}$$



Figuur 1.1: Plattegrond van Quadratia met startpunt $(10, 6)$.

De fietser zal in ieder geval 6 blokken naar het zuiden moeten fietsen; de verticale afstand die hij aflegt is dus 6. De horizontale afstand is het verschil tussen 10 en x, waarbij dit verschil niet kleiner dan 0 mag zijn (een negatieve afstand is natuurlijk onzin). We kunnen dit noteren met behulp van het begrip absolute waarde (zie Hoofdstuk 4); de afstand tussen twee getallen x en y wordt gegeven door $|y - x|$. De afstand van de fietser wordt nu

$$\text{horizontale afstand} + \text{verticale afstand} \quad = \quad |10 - x| + 6.$$

Verder heeft de fietser een snelheid van 24 km/u, dus over 500 meter doet hij $1\frac{1}{4}$ minuut. De totale reistijd van de fietser is dus

$$\tfrac{5}{4}(|10 - x| + 6) = \tfrac{5}{4} \cdot |10 - x| + 7\tfrac{1}{2} \text{ minuten.}$$

De helikopterpiloot is dus sneller dan de fietser als geldt dat

$$7\tfrac{1}{2} + \sqrt{(10-x)^2+36} < \tfrac{5}{4}\cdot|10-x| + 7\tfrac{1}{2}.$$

Voor welke waarden van x geldt deze ongelijkheid? Laten we $x = 0$ eens proberen. We rekenen eerst uit hoeveel minuten de helikopterpiloot nodig heeft om op kruispunt $(0,0)$ te komen:

$$\begin{aligned} 7\tfrac{1}{2} + \sqrt{(10-0)^2+36} &= 7\tfrac{1}{2} + \sqrt{10^2+36} \\ &= 7\tfrac{1}{2} + \sqrt{136} \\ &\approx 19,16. \end{aligned}$$

De fietser heeft het volgende aantal minuten nodig om op kruispunt $(0,0)$ te komen:

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{4}\cdot|10-x| + 7\tfrac{1}{2} &= \tfrac{5}{4}\cdot 10 + 7\tfrac{1}{2} \\ &= 20. \end{aligned}$$

De helikopterpiloot wint dus een wedstrijd naar $(0,0)$, maar hoe kunnen we (zonder ze één voor één in te vullen) alle waarden van x vinden waarvoor de helikopterpiloot wint? In de hierop volgende hoofdstukken komen enkele methodes aan bod waarmee dit vraagstuk (en vele andere vraagstukken) kan worden opgelost.

2

Het oplossen van vergelijkingen

In dit hoofdstuk bespreken we het oplossen van vergelijkingen.

Voorbeeld 2.1

We onderzoeken de vergelijking $3x + 5 = 7x - 19$. Deze vergelijking is een korte weergave van het wiskundige probleem "Vind alle x die voldoen aan de relatie $3x + 5 = 7x - 19$". Dit probleem is eenvoudig op te lossen.

$$\begin{aligned} 3x + 5 = 7x - 19 \quad &\Leftrightarrow \quad -4x + 5 = -19 \\ &\Leftrightarrow \quad -4x = -24 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 6, \end{aligned}$$

en we concluderen dat $(x =)$ 6 de enige oplossing is van de vergelijking $3x + 5 = 7x - 19$.

Voor het oplossen van deze vergelijking hebben we gebruikgemaakt van het wiskundige symbool "$\Leftrightarrow$". Dit symbool heeft een wiskundige betekenis en mag niet verkeerd gebruikt worden. Om duidelijk te maken wat dit symbool betekent kijken we eerst naar de twee enkelvoudige pijlen. De bewering "$A \Rightarrow B$" betekent "als A waar is dan is B ook waar", "A impliceert B" of "B volgt uit A". De bewering $-4x = -24 \Rightarrow x = 6$ betekent bijvoorbeeld als $-4x = -24$ dan $x = 6$. Op dezelfde manier betekent de bewering "$A \Leftarrow B$" daarom "als B waar is dan is A ook waar", "B impliceert A" of "A volgt uit B". Een voorbeeld hier van is de bewering $-4x = -24 \Leftarrow x = 6$. Dit betekent als $x = 6$ dan $-4x = -24$. De bewering "$A \Leftrightarrow B$" betekent dat zowel "$A \Rightarrow B$" als "$A \Leftarrow B$" klopt. We zeggen dat "A geldt dan en slechts dan als B geldt". A en B zijn dan logisch equivalente beweringen. De bewering $-4x = -24 \Leftrightarrow x = 6$ betekent bijvoorbeeld $-4x = -24$ geldt dan en slechts dan als $x = 6$.

Waarom konden we "$\Leftrightarrow$" gebruiken in de eerste stap van de oplossing hierboven? Laat A de vergelijking "$3x + 5 = 7x - 19$" zijn en B de vergelijking "$-4x + 5 = -19$". We gaan eerst na of $A \Rightarrow B$ klopt. Neem aan dat A waar is, oftewel dat $3x + 5 = 7x - 19$. Door aan beide zijden van het gelijkteken $7x$ af te trekken krijgen we $-4x + 5 = -19$. Dus B is waar. We concluderen dat $A \Rightarrow B$ klopt.

Vervolgens gaan we na of $A \Leftarrow B$ klopt. Neem aan dat B waar is, oftewel dat $-4x + 5 = -19$. Als we $7x$ optellen aan beide zijden van het gelijkteken krijgen we $3x + 5 = 7x - 19$. Dus A is waar. We concluderen dat $A \Leftarrow B$ klopt. Ga zelf na dat het tweede en derde gebruik van $\Leftrightarrow$ in de oplossing hierboven correct is.

Opgave 2.1

Los de volgende gelijkheid op: $5x + 12 = -3x + 36$.

Elke vergelijking met variabele x kan herschreven worden door alle termen naar de linkerkant van het gelijkteken te brengen: het "op nul stellen" van de vergelijking. Op die manier krijgen we

$$f(x) = 0,$$

waarbij $f(x)$ een uitdrukking is in termen van x. Het op nul stellen van de vergelijking uit Voorbeeld 2.1 geeft bijvoorbeeld $-4x + 24 = 0$. Voor het oplossen van een op nul gestelde vergelijking kan het soms handig zijn om de uitdrukking te ontbinden in factoren. Wanneer het lukt om $f(x)$ te schrijven als het product van twee andere uitdrukkingen, $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, dan

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow g(x) \cdot h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ of } h(x) = 0. \end{aligned}$$

Het vinden van de nulpunten van $f(x)$, oftewel het oplossen van $f(x) = 0$, is dus equivalent met het vinden van de nulpunten van de in het algemeen eenvoudigere uitdrukkingen $g(x)$ en $h(x)$.

Voorbeeld 2.2

Het oplossen van de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ kan via de volgende methode:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ of } x = 2. \end{aligned}$$

De oplossing is dus $x = 3$ of $x = 2$. ◀

In het volgende voorbeeld gebruiken we het op nul stellen van een vergelijking en laten we bovendien zien dat achteloos gebruik van "$\Leftrightarrow$" kan leiden tot ernstige fouten.

Voorbeeld 2.3

Bekijk de vergelijking $\sqrt{x+10} = x - 2$. Omdat het niet mogelijk is de wortel te trekken van een negatief getal weten we dat deze uitdrukking alleen betekenis heeft voor x zodanig dat $x + 10 \geq 0$, oftewel voor $x \geq -10$. Het probleem is dus eigenlijk "Vind alle $x \geq -10$ zodanig dat $\sqrt{x+10} = x - 2$". Het oplossen van dit probleem is iets lastiger dan de eerdere problemen.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+10} = x - 2 &\Rightarrow (\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x + 10 = x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = 6. \end{aligned}$$

Waarom schrijven we enkel "$\Rightarrow$" in de eerste stap van de oplossing? Het antwoord hierop is eenvoudig: het is niet correct om "$\Leftrightarrow$" te schrijven.

Laten we eerst nagaan of $\sqrt{x+10} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2$ klopt. Neem aan dat $\sqrt{x+10} = x - 2$ waar is. Door te kwadrateren aan beide zijden van het gelijkteken krijgen we $(\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2$. We concluderen dat $\sqrt{x+10} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2$ klopt.

Waarom klopt $(\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{x+10} = x - 2$ niet? Neem aan dat $(\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2$ waar is, oftewel $a^2 = b^2$ met $a = \sqrt{x+10}$ en $b = x - 2$. Vanuit $a^2 = b^2$ kunnen we enkel concluderen dat $a = b$ of $a = -b$, oftewel $\sqrt{x+10} = x-2$ of $\sqrt{x+10} = -(x-2)$. We kunnen zeker niet beweren dat $\sqrt{x+10} = x-2$. Dus $(\sqrt{x+10})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{x+10} = x-2$ klopt niet.

Hoe moeten we nu verder met het oplossen van bovenstaande vergelijking? We hebben laten zien dat als $\sqrt{x+10} = x-2$ dan $x = -1$ of $x = 6$. De enige kandidaten voor een oplossing zijn dus -1 en 6. Door het ontbreken van een "$\Leftarrow$" zijn we echter niet zeker dat dit ook allebei oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking zijn. We kunnen namelijk niet beweren dat als $x = -1$ (of als $x = 6$) dan $\sqrt{x+10} = x-2$.

De enige optie is om beide kandidaten na te gaan door ze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking. We krijgen

$$\begin{array}{rcccccr} \sqrt{-1+10} & = & 3 & \neq & -3 & = & -1-2, \\ \sqrt{6+10} & = & 4 & = & 4 & = & 6-2. \end{array}$$

Dus $x = 6$ is de enige oplossing. ◀

Opgave 2.2

Los de volgende vergelijking op: $\sqrt{x-1} = 7-x$.

Hieronder volgt nog een voorbeeld waaruit blijkt dat je zeer voorzichtig moet zijn wanneer je vergelijkingen oplost.

Voorbeeld 2.4

Los de vergelijking $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2-4x+10$ op. Laten we de vergelijking oplossen zonder ons druk te maken om "$\Leftrightarrow$" en "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} \frac{x^3-8}{x-2} = x^2-4x+10 \quad & \Leftrightarrow \quad x^3-8 = (x-2)(x^2-4x+10) \\ & \Leftrightarrow \quad x^3-8 = x^3-4x^2+10x-2x^2+8x-20 \\ & \Leftrightarrow \quad x^3-8 = x^3-6x^2+18x-20 \\ & \Leftrightarrow \quad 6x^2-18x+12 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ of } x = 2. \end{aligned}$$

Uit bovenstaande trekken we de conclusie dat de twee oplossingen van de vergelijking 1 en 2 zijn. Deze conclusie is echter fout. Wanneer we $x = 2$ invullen in de vergelijking krijgen we "$\frac{0}{0} = 6$". Dit is een rare wiskundige bewering en bovendien volledig onjuist. Wat ging er verkeerd?

We zijn vergeten aan te geven voor welke waarden van x de uitdrukking in de vergelijking betekenis heeft. Wanneer we dit wel doen krijgen we "Vind alle $x \neq 2$ zodanig dat $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2-4x+10$". Nu kunnen we schrijven:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3-8}{x-2} = x^2-4x+10 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3-8 = (x-2)(x^2-4x+10) \\
&\Leftrightarrow \quad x^3-8 = x^3-4x^2+10x-2x^2+8x-20 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3-8 = x^3-6x^2+18x-20 \\
&\Leftrightarrow \quad 6x^2-18x+12 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1
\end{aligned}
$$

Bij de laatste "$\Leftrightarrow$" maken we gebruik van het feit dat $x-2 \neq 0$. Dus $x = 2$ is geen oplossing en daarom is $x = 1$ de enige oplossing. ◀

Opgave 2.3
Los de volgende vergelijking op: $\frac{x^2-1}{x-1} = 5 - x$.

Opgave 2.4
Los de volgende vergelijking op: $\sqrt{8x+9} = x$.

Opgave 2.5
Los de volgende vergelijking op: $\frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} = x$.

3

Het oplossen van ongelijkheden

In dit hoofdstuk bespreken we het oplossen van ongelijkheden.

Voorbeeld 3.1
We willen de volgende ongelijkheid oplossen:

$$x^3 + 18x \quad < \quad 9x^2.$$

Het is allereerst verstandig de ongelijkheid op nul te stellen:

$$x^3 - 9x^2 + 18x \quad < \quad 0.$$

Vervolgens bepalen we de oplossingen van de bijbehorende vergelijking:

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^2 + 18x = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 9x + 18) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x(x-3)(x-6) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = 6. \end{aligned}$$

De getallen 0, 3 en 6 verdelen het domein[1] van de functie f, met f gegeven door $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$, in vier delen: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 6)$ en $(6, \infty)$. In elk van deze delen is de functie ofwel positief ofwel negatief. Een functie kan namelijk alleen negatieve en postieve waarden op een interval hebben als het ergens op dat interval ook de waarde 0 aanneemt en dat is in elk van de gegeven intervallen niet het geval.[2] Het is daarom voldoende om voor elk van de gegeven intervallen één willekeurige functiewaarde uit te rekenen. Uit bijvoorbeeld $f(-1) = -28$ volgt dat f negatief is op $(-\infty, 0)$, uit $f(1) = 10$ dat f positief is op $(0, 3)$, uit $f(5) = -10$ dat f negatief is op $(3, 6)$, en uit $f(10) = 280$ dat f positief is op $(6, \infty)$. Op deze manier krijgen we een tekenoverzicht van de functie f.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & & f(x) \\ \hline & & & & 0 & & & & & 3 & & & & & 6 & & & & & & x \end{array}$$

Uit het tekenoverzicht lezen we af dat de oplossing van de ongelijkheid gegeven wordt door $x < 0$ of $3 < x < 6$.

[1] Het domein van een functie is de verzameling van getallen waarvoor de functie een uitkomst geeft.
[2] We nemen hier aan dat de functie f continu is op het domein van de functie. We gaan in dit dictaat verder niet in op het begrip continuïteit. Alle functies in dit dictaat voldoen hieraan.

Opgave 3.1
Los de volgende ongelijkheid op: $(x^2+2)(x-1) > 8 \cdot (x - \frac{1}{4})$.

Voorbeeld 3.2
We willen de volgende ongelijkheid oplossen:

$$\frac{4}{5+x} \quad \geq \quad x+2.$$

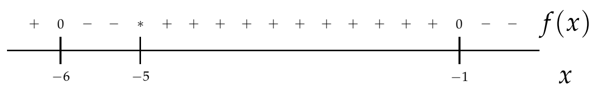
We stellen de ongelijkheid op nul:

$$\frac{4}{5+x} - (x+2) \quad \geq \quad 0.$$

We definiëren de functie f voor alle $x \neq -5$: $f(x) = \frac{4}{5+x} - (x+2)$. We bepalen wederom eerst de nulpunten van f. Voor alle $x \neq -5$ (het domein van f) hebben we:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5+x} - (x+2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 - (x+2)(5+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2 - 7x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 7x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)(x+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -6 \text{ of } x = -1. \end{aligned}$$

De getallen -6, -1 en -5 verdelen het domein van f in vier delen: $(-\infty, -6)$, $(-6, -5)$, $(-5, -1)$ en $(-1, \infty)$. Uit $f(-7) = 3$, $f(-5\frac{1}{2}) = -4\frac{1}{2}$, $f(-4) = 6$ en $f(0) = -1\frac{1}{5}$ volgt het onderstaande tekenoverzicht[3].



Uit het tekenoverzicht van f volgt dat de oplossing wordt gegeven door $x \leq -6$ of $-5 < x \leq -1$. Merk op dat de functie niet alleen van teken kan wisselen in nulpunten van f, maar ook in punten waar de functie niet gedefinieerd is. In dit voorbeeld is -5 een dergelijk punt.

Hieronder volgt een stappenplan voor het oplossen van ongelijkheden.

[3] Let op dat je de waarden invult in de functie f.

Ongelijkheden oplossen

1) Stel de ongelijkheid op nul (oftewel breng de ongelijkheid in de vorm $f(x) \geq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ of $f(x) < 0$).
2) Bepaal waar f niet gedefinieerd is en bepaal de nulpunten van f.
3) Bepaal het tekenoverzicht van f.
4) Lees de oplossing(en) af uit het tekenoverzicht.

Opgave 3.2

Los de volgende ongelijkheid op: $\frac{1-x}{3+x} \geq -x+1$.

Opgave 3.3

Los de volgende ongelijkheid op: $x^3 - 2x^2 + x > 0$.

4
De absolute waarde

Als x een getal is ongelijk aan 0, dan is of x positief of $-x$ is positief. De absolute waarde van $x \neq 0$ is gedefinieerd als het positieve getal van de getallen x en $-x$.

Definitie (Absolute waarde)

De absolute waarde van x, genoteerd als $|x|$, wordt gegeven door

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{als} \quad x < 0, \end{cases}$$

Voorbeeld 4.1

De absolute waarde van 4 wordt gegeven door $|4| = 4$, omdat $4 > 0$. De absolute waarde van -4 is ook $|-4| = 4$, omdat $-4 < 0$.

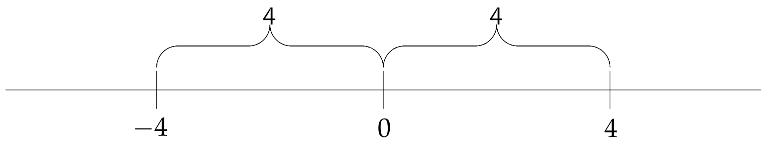
Opgave 4.1

a) Bepaal de absolute waarde van -13.
b) Bepaal de absolute waarde van 0.

De absolute waarde van een getal kan geïnterpreteerd worden als de afstand tussen het getal en nul. De absolute waarde van het verschil tussen twee getallen kun je zien als de afstand tussen die getallen op de getallenlijn.

Voorbeeld 4.2

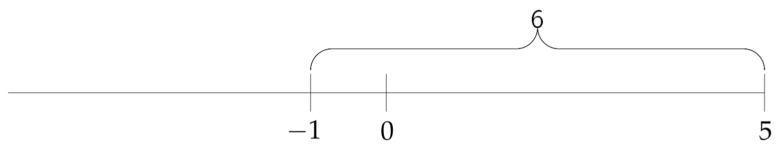
De afstand van 4 tot 0 is 4 en de afstand van -4 tot 0 is ook 4.



Daarom geldt $|4| = |-4| = 0$.

Voorbeeld 4.3

De afstand tussen de getallen 5 en -1 is 6.



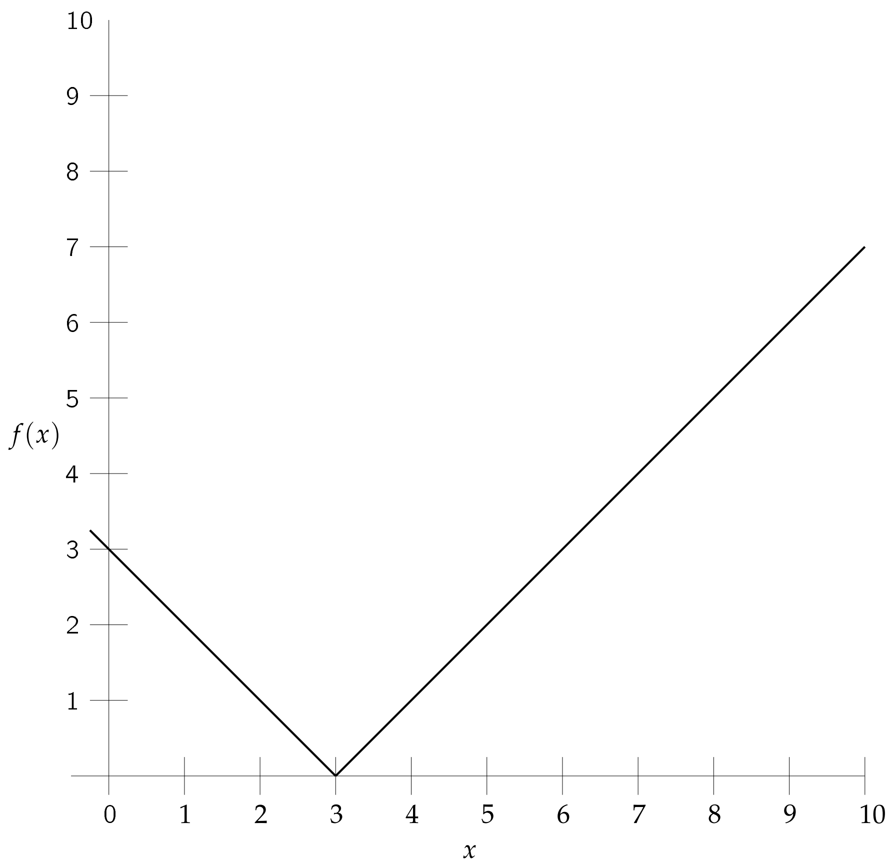
Daarom geldt $|5-(-1)| = |-1-5| = 6$.

Opgave 4.2

a) Bepaal de afstand tussen -8 en -2.
b) Bepaal $|-8-(-2)|$.

Voorbeeld 4.4

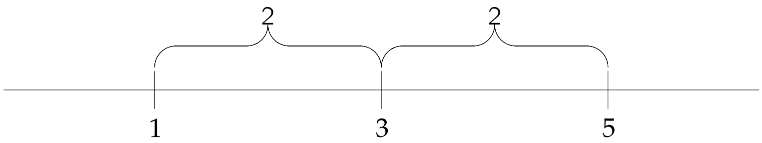
We beschouwen de vergelijking $|x-3| = 2$. Laten we eerst de grafiek kijken van $f(x) = |x-3|$ bestuderen. In de grafiek is te zien dat hoe verder de x-waarde van 3 afligt hoe hoger de func-



Figuur 4.1: De grafiek van $f(x) = |x-3|$

tiewaarde. De vraag is nu dus om alle x te vinden zodanig dat de afstand tussen x en 3 gelijk is aan

2. Uit het onderstaande plaatje is op te maken dat $x = 1$ of $x = 5$.



Laten we dit probleem ook algebraïsch oplossen. We weten door de definitie van de absolute waarde dat $|x-3| = x-3$ als $x-3 \geq 0$. Dus $|x-3| = x-3$ als $x \geq 3$. Verder geldt $|x-3| = 3-x$ als $x-3 < 0$, oftwel $|x-3| = 3-x$ als $x < 3$. We splitsen daarom de vergelijking $|x-3| = 2$ op in twee delen.

We nemen eerst aan dat $x \geq 3$:

$$\begin{aligned} |x-3| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x-3 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5. \end{aligned}$$

Vervolgens nemen we aan dat $x < 3$:

$$\begin{aligned} |x-3| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3-x = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

Op deze manier kunnen we de oplossing $x = 1$ of $x = 5$ ook algebraïsch vinden.

Opgave 4.3

Los de volgende vergelijking op: $|x-2| = 3$.

Voorbeeld 4.5

We beschouwen de volgende ongelijkheid: $|x-7| < 3$. Om deze ongelijkheid op te lossen stellen we de ongelijkheid eerst op nul:

$$|x-7| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x-7| - 3 < 0.$$

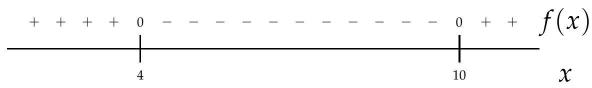
Vervolgens bepalen we de oplossing van de bijbehorende vergelijking voor $x \geq 7$:

$$\begin{aligned} |x-7| - 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x-7-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x-10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 10. \end{aligned}$$

Dan bepalen we de oplossing van de vergelijking voor $x < 7$:

$$\begin{aligned} |x-7| - 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x+7-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x+4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 4. \end{aligned}$$

De getallen 4 en 10 verdelen het domein van de functie f, met f gegeven door $f(x) = |x-7| - 3$, in drie delen: $(-\infty, 4)$, $(4, 10)$ en $(10, \infty)$. Uit $f(-10) = 14$ volgt dat f positief is op $(-\infty, 4)$, uit $f(7) = -3$ dat f negatief is op $(4, 10)$ en uit $f(11) = 1$ dat f positief is op $(10, \infty)$. Op deze manier krijgen we een tekenoverzicht van f.



Uit het tekenoverzicht lezen we af dat de oplossing van de ongelijkheid gegeven wordt door $4 < x < 10$.

Opgave 4.4

Los de volgende ongelijkheid op: $|x-4| > 5$.

De absolute waarde voldoet aan een aantal eenvoudige eigenschappen die direct voortkomen uit de definitie.

Stelling 4.1 : Eigenschappen absolute waarde

Voor iedere x en y gelden de onderstaande eigenschappen.

a) $|-x| = |x|$

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

c) $-|x| \leq x \leq |x|$

Bewijs :

a) We splitsen het bewijs op in drie delen: $x > 0$, $x = 0$ en $x < 0$. We nemen eerst aan dat $x > 0$. Dan $|x| = x$. Omdat $-x < 0$ geldt dat $|-x| = -(-x) = x$. Dus $|x| = |-x|$.

Vervolgens nemen we aan dat $x = 0$. Dan $|x| = 0$ en $|-x| = 0$. Dus $|x| = |-x|$.

Uiteindelijk nemen we aan dat $x < 0$. Dan $|x| = -x$. Omdat $-x > 0$ geldt verder $|-x| = -x$. Dus $|x| = |-x|$. ■

Opgave 4.5

Laat zien dat de onderdelen (a), (b), en (c) van Stelling 4.1 kloppen voor $x = -5$ en $y = 3$.

Opgave 4.6

Bewijs eigenschappen (b) en (c) van Stelling 4.1. Hint: Gebruik bij elk van de bewijzen ook een opsplitsing in (minstens) drie delen.

Een ongelijkheid in combinatie met een absolute waarde, zoals in Opgave4.4, kan vervangen worden door een uitdrukking zonder absolute waarde.

Stelling 4.2 : Insluiting absolute waarde

Voor iedere $c \geq 0$ en x geldt het volgende:

$$|x| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c.$$

Bewijs :

Neem een $c \geq 0$ en een x. We bewijzen eerst dat $|x| \leq c$ impliceert dat $-c \leq x \leq c$. Vervolgens bewijzen we dat $-c \leq x \leq c$ impliceert dat $|x| \leq c$. Deze twee stappen vormen samen een compleet bewijs van de stelling.

($\Rightarrow$) Neem aan dat $|x| \leq c$.

Als $x = 0$, dan volgt direct dat $-c \leq x \leq c$.

Als $x > 0$, dan $x = |x| \leq c$ en aangezien $-c \leq 0$ en $0 < x$ geldt ook dat $-c \leq x$. Daarom geldt dat $-c \leq x \leq c$.

Als $x < 0$, dan $-x = |x| \leq c$, waaruit volgt dat $-c \leq x$. Verder geldt dat $x < 0 \leq c$. De conclusie is dat $-c \leq x \leq c$.

($\Leftarrow$) Neem aan dat $-c \leq x \leq c$.

Als $x = 0$, dan volgt direct dat $|x| = 0 \leq c$.

Als $x > 0$, dan $|x| = x \leq c$.

Als $x < 0$, dan $|x| = -x \leq -(-c) = c$. ■

Met kleine aanpassingen in het bovenstaande bewijs kunnen we uiteraard ook aantonen dat voor iedere $c > 0$ en x geldt dat $|x| < c$ dan en slechts dan als $-c < x < c$.

Opgave 4.7

Los met behulp van Stelling 4.2 de volgende ongelijkheid op: $|5 - x| \leq 1$.

Opgave 4.8

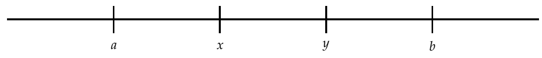
Gegeven is dat $3 < x < 8$ en $3 < y < 8$. Geef de laagst mogelijke bovengrens voor de afstand tussen x en y.

Opgave 4.9

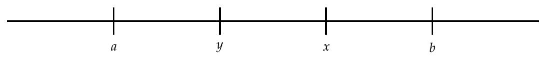
Bewering: Voor iedere x, y, a en b geldt het volgende:

$$\text{als} \quad a < x < b \quad \text{en} \quad a < y < b, \quad \text{dan} \quad |x - y| < b - a.$$

Schets van de situatie met $x < y$.



Schets van de situatie met $y < x$.



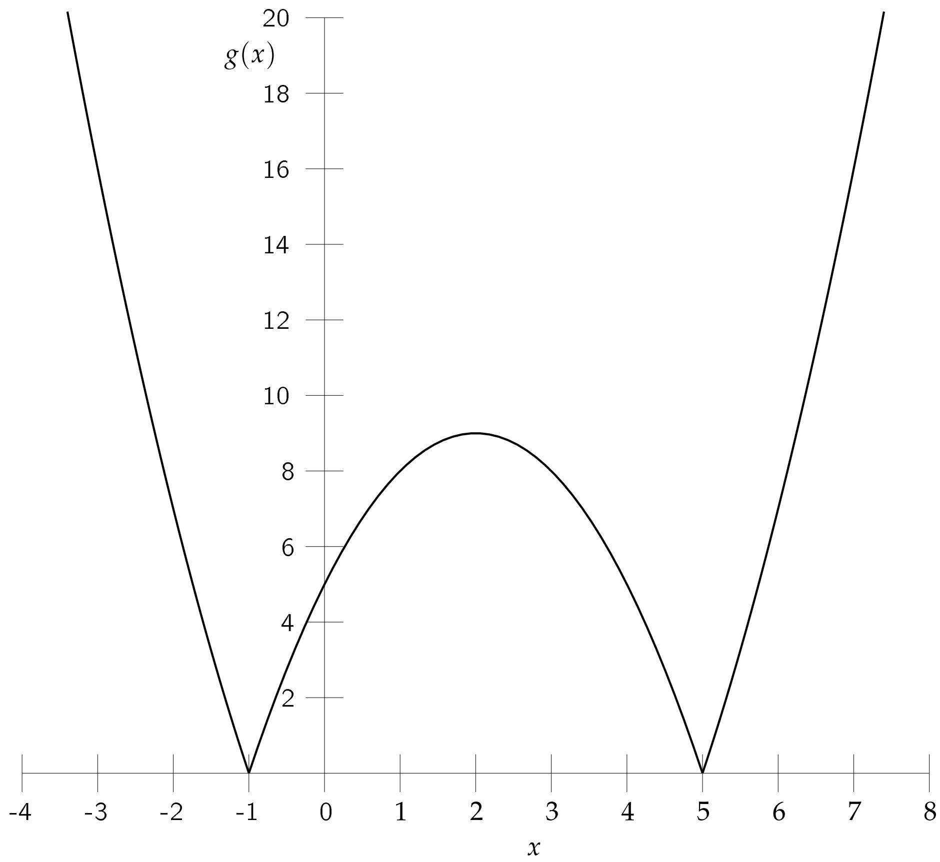
De afstand tussen x en y ($|x - y|$) is dus inderdaad kleiner dan de afstand tussen a en b ($b - a$), als x en y beiden tussen a en b liggen. Bewijs de bovenstaande bewering met behulp van Stelling 4.2.

Opgave 4.10

Los de volgende ongelijkheid op: $|x - 5|(x - 2) < (x - 5)(x - 2)$.

Opgave 4.11

Zie het onderstaande plaatje voor de grafiek van $g(x) = |(x - 2)^2 - 9|$.



Figuur 4.2: De grafiek van $g(x) = |(x - 2)^2 - 9|$

Los de volgende ongelijkheid op: $|(x-2)^2-9|<7$.

Opgave 4.12

Bewijs dat voor iedere x het volgende geldt: $(|x|)^2 = x^2$.

We keren terug naar het voorbeeld uit Hoofdstuk 1 met daarin de aanstaande wedstrijd tussen de helikopterpiloot en de fietser. Ze staan beiden op het kruispunt van de straten V10 en H6 en de wedstrijd gaat naar het kruispunt van een nog te bepalen straat V en de straat H0. Wie is er het snelst? Dit probleem hebben we in Hoofdstuk 1 vertaald naar een wiskundige vergelijking. Met x het nummer van de verticale straat is de helikopterpiloot sneller dan de fietser bij het kruispunt als

$$7\tfrac{1}{2} + \sqrt{(10-x)^2+36} < \tfrac{5}{4} \cdot |10-x| + 7\tfrac{1}{2}.$$

Kun je nu met de kennis die je hebt opgedaan aangaande het oplossen van ongelijkheden (Hoofstukken 2 en 3) en de absolute waarde (Hoofdstuk 4) bepalen welke kruispunten de helikopterpiloot moet voorstellen om deze wedstrijd te kunnen winnen?

Opgave 4.13

Bepaal alle kruispunten waarvoor de helikopterpiloot de wedstrijd zal gaan winnen.

A
Antwoorden

Opgave 2.1
$x = 3$.

Opgave 2.2
$x = 5$.

Opgave 2.3
$x = 2$.

Opgave 2.4
$x = 9$.

Opgave 2.5
$x = 2$

Opgave 3.1
$-2 < x < 0$ of $x > 3$.

Opgave 3.2
$-3 < x \leq -2$ of $x \geq 1$.

Opgave 3.3
$0 < x < 1$ of $x > 1$.

Opgave 4.1
a) 13.
b) 0.

Opgave 4.2
a) 6.
b) 6.

Opgave 4.3
$x = -1$ of $x = 5$.

Opgave 4.4
$x < -1$ of $x > 9$.

Opgave 4.5

Opgave 4.6

Opgave 4.7
$4 \leq x \leq 6$.

Opgave 4.8
5.

Opgave 4.9

Opgave 4.10
$x < 2$.

Opgave 4.11
$-2 < x < 2 - \sqrt{2}$ of $2 + \sqrt{2} < x < 6$.

Opgave 4.12

Opgave 4.13
Als de helikopterpiloot de fietser ervan weet te overtuigen dat ze het wedstrijdje naar de kruisingen V0H0, V1H0, V19H0 of V20H0 laten gaan, dan zal hij winnen. (Op de kruisingen V2H0 en V18H0 wordt het een gelijkspel.)